Review $T: V \to V$

$A \in M_n(\mathbb{K})$, $P^{-1}AP$ 相似.

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ A 可以上三角化.

存在 P 可逆, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & & * \\ & \ddots \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 \ddots \lambda_2 & * \\ 0 & & & \ddots \lambda_s \end{bmatrix}$

characteristic polynomial of A

$$f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

m_i 是 λ_i 的代数重数.

$f_{P^{-1}AP}(\lambda) = f_A(\lambda)$. (定义 $f_T(\lambda)$)

计算 A^k. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & k \end{bmatrix}$.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

归纳法.

定义（不变子空间） $T: V \to V$.

$W \subset V$ 子空间，如果 $T|_W : W \to W$

$(T(W) \subset W)$

称 W 是 T 不变子空间

例：① $W = \ker T$.

② v 是 T 的特征向量 $(Tv = \lambda v)$

$W = \operatorname{span} v$ 是 T 不变子空间.

性质：$W \subset V$ 不变子空间,

B': $v_1 \cdots v_k$ 是 W 的一组基，扩充为 V 的基.

B: $v_1 \cdots v_k \; v_{k+1} \cdots v_n$

$$[T]_B^B = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & C \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right]$$

A_1: $T|_W : W \to W$

A_2: $\bar{T}: V/W \to V/W$

$$A_1 = [T|_W]_{B'}^{B'}$$

证明： $T(v_1) = a_{11} v_1 + a_{21} v_2 + \cdots a_{n1} v_n$

$T(v_1) \in W$, $\quad a_{(k+1),1} = 0$, $a_{(k+2),1} = 0$

$\cdots$ $a_{n1} = 0$

$$[T]_B^B = \left([T(v_1)]_B \cdots \quad -- \right) \cdots$$

Rmk: $C=0$，则存在 W 的补空间 W'.
W' 也是不变子空间.

Cayley - Hamilton Thm.（证明想法重要）

$f(\lambda) = f_A(\lambda)$，则 $f(A) = 0$

Pf: $\lambda \cdot v = T(v)$， $g(\lambda) \cdot v = g(T)(v)$

$$\boxed{(g(\lambda) \cdot h(\lambda)) \cdot v = g(\lambda) \cdot (h(\lambda) \cdot v)}$$

扩充数乘

$$\lambda (v_1 \cdots v_n) = (v_1 \cdots v_n) A.$$

$$\lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = A^T \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$(\lambda I - A^T)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{(\lambda I - A^T)^*}} \cdot \left(\underline{(\lambda I - A^T)} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\left((\lambda I - A^T)^* \cdot (\lambda I - A^T)\right)} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} |\lambda I - A^T| & & \\ & \ddots & \\ & & |\lambda I - A^T| \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{|\lambda I - A^T|} \cdot v_i = 0 .$$

$$\underline{f_{A^T}(T)}\,(v_i) = 0 .$$

例4: $\underline{A \quad n\times n, \quad A^k=0.}$ (幂零矩阵)

则 $\underline{A^n=0}$,

Pf: $A^k=0 \Rightarrow$ 特征根 λ 有 $\lambda^k=0$

$\Rightarrow \lambda=0$

$f_A(\lambda)=\lambda^n. \overset{\text{C-H}}{\Rightarrow} A^n=0.$

---

minimal polynomial

$$\boxed{\mathbb{K}[\lambda] \supset I = \{g(\lambda) \mid g(A)=0\}.}$$

I 中 deg 最小的非零多项式 $m(\lambda)$

性质: $\forall g(\lambda) \in I, \quad m(\lambda) \mid g(\lambda)$

取 $m(\lambda)$ 首项系数 $=1$, 则 $m(\lambda)$ 由

A 唯一确定, 称 $m(\lambda)$ 为 A 的极小多项式

$$\boxed{P^{-1}g(A)P = g(P^{-1}AP)}$$

$\Downarrow$ $m_{P^{-1}AP}(\lambda) = m_A(\lambda)$

例： $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$， $f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$， $f(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$ $= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$

$\boxed{\lambda_1 \neq \lambda_2}$.

claim: $\boxed{m(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda - 2}$

pf: $m(\lambda) \mid f(\lambda)$， $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)$

或 $(\lambda - \lambda_2)$

或 $f(\lambda)$

若 $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)$

如果 v 是 $\lambda = \lambda_2$ 的特征向量. $v \neq 0$

$A \cdot v = \lambda_2 v$.

$(A - \lambda_1 I)v = (\lambda_2 - \lambda_1)v \neq 0$. 矛盾.

同理 $m(\lambda) \neq (\lambda - \lambda_2)$

$\Rightarrow m(\lambda) = f(\lambda)$

性质：若 λ_i 是 A 的特征根，

$\lambda-\lambda_i \mid m(\lambda)$

问题：$\underline{A \in M_n(\mathbb{R})}$ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$，

以 $\mathbb{R}[\lambda]$ 来定义 $m(\lambda)$

与以 $\mathbb{C}[\lambda]$ 来定义 $m(\lambda)$

是否相同??

$\mathbb{C}[\lambda] \supsetneq \mathbb{R}[\lambda]$，在 $\mathbb{C}[\lambda]$ 中

$\deg m(\lambda)$ 可能会更小.

考虑 $\underline{I, A, A^2, \cdots A^k}$.

Claim：第一个 k，使得 线性相关.

$k=\deg m(\lambda)$

是关于 $a_0, \cdots a_k$ 为未知元

的线性方程组有无非0解.

(消元法) 与 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$，$\mathbb{R}$ 无关.

定理：A 在 $\mathbb{K}$ 上可对角化，$A \in M_n(\mathbb{K})$

即存在 $P \in M_n(\mathbb{K})$，P 可逆

$P^{-1}AP$ 对角阵

$\Longleftrightarrow$ $m(\lambda)$ 在 $\mathbb{K}[\lambda]$ 中可分解为

1 次多项式乘积，且没有重根。

推论：$T: V \to V$ 可对角化，

W T-不变子空间，

则 $T|_W : W \to W$ 可对角化。

Pf: $m_V(\lambda)$ 是 $T: V \to V$ 极小多项式

是 $T|_W : W \to W$ 化零多项式。

$m_W(\lambda)$ 是 $m_V(\lambda)$ 的因子。

$\Rightarrow m_W(\lambda)$ 完全分解且无重根。

例：$A^2 = I$。$\mathbb{K}$ 中 $-1 \neq 1$，$2 \neq 0$

则 A 在 $\mathbb{K}$ 上可对角化。

pf: $\lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$

完全分解且无重根

定理:

pf: $\underline{`` \Rightarrow "}$ 对对角阵 $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & & \lambda_s \ddots \lambda_s \end{bmatrix}$

$m_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

$`` \Leftarrow "$ $m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_s)$

$\lambda_1 \cdots \lambda_s$ 互不相同.

取 $h_i(\lambda) = \dfrac{m(\lambda)}{(\lambda - \lambda_i)}$

$g.c.d\,(h_1, h_2 \cdots h_s) = 1$.

$\Rightarrow k_1(\lambda) \cdots k_s(\lambda) \in \mathbb{K}[\lambda]$

$k_1(\lambda) \cdot h_1(\lambda) + \cdots + k_s(\lambda) \cdot h_s(\lambda) = 1$

$\Rightarrow k_1(A) h_1(A) \cdots + k_s(A) h_s(A) = \underline{I}$

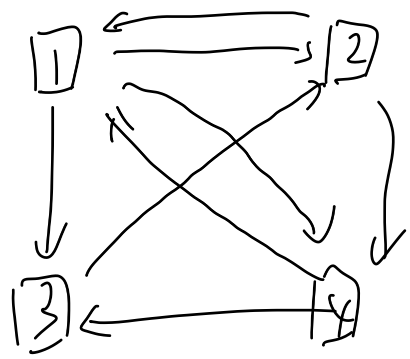
$\Rightarrow v, \quad v = v_1 + \cdots + v_s$

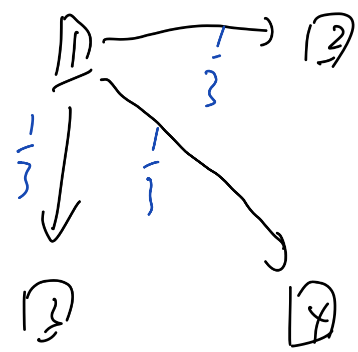
$v_i = (k_i(A) \cdot h_i(A)) \cdot v$

$$(A-\lambda_i I)V_i = 0. \quad \left((\lambda-\lambda_i)\, h_i(\lambda) = m(\lambda) \right)$$

$$V_i \in \underline{\ker(\lambda_i I - A)}$$

<u>Page Rank</u>





$x_i(t)$ 在 t 时刻处于网页 i 的概率.

$$0 \le x_i(t) \le 1, \qquad \sum_{i=1}^{4} x_i(t) = 1$$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \frac{1}{2} x_2(t) + x_4(t) \\ x_2(t+1) = \frac{1}{3} x_1(t) + \frac{1}{2} x_3(t) \\ x_3(t) = \frac{1}{3} x_1(t) \\ x_4(t) = \frac{1}{3} x_1(t) + \frac{1}{2} x_2(t) + \frac{1}{2} x_3(t) \end{cases}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix}$$

$$X(t+1) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} X(t)$$

$$X(t+1) = A \cdot X(t)$$

问题：$\lim\limits_{t \to +\infty} X(t)$ 是否存在？是否唯一？

Markov chain

$$A = (a_{ij})_{n \times n}. \qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \qquad a_{ij} \geq 0$$

Stochastic 随机矩阵.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 概率向量 (p-vector)

$x_i \geq 0$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$

时间 t 时，$x(t)$. $x_i(t)$ 处于状态 i 的概率

t 到 $t+1$ 时. i 变到 j 的概率 a_{ji}.

则有 $\sum_j a_{ji} = 1$　$A = (a_{ji})$

$$x(t+1) = A \cdot x(t)$$

$$\left(x_j(t+1) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \cdot x_i(t) \right)$$

性质：$A \cdot x$ 仍然是概率向量.

推论：A^k S-矩阵.

(A, B S-矩阵, AB 也是)

定理：A S-matrix. $a_{ij} > 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$.

$x = (x_1 \cdots x_n)$ 概率向量.

$\lim_{k \to +\infty} A^k \cdot x = y$ 存在.

且 y 与 x 选取无关.

证明: "唯一性". $Ay = y$. $y_j \geq 0$

$\Rightarrow y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j > 0$.

假设 y, y' p-vector.

$Ay = y$, $Ay' = Ay'$.

取 $\{\underset{\alpha \in \mathbb{R}}{\alpha \geq 0} \mid y - \alpha y'$ 每个分量 $\geq 0\}$ 中

α 的最大值. α_0.

$y'' = y - \alpha_0 y'$ 有一个分量 $= 0$.

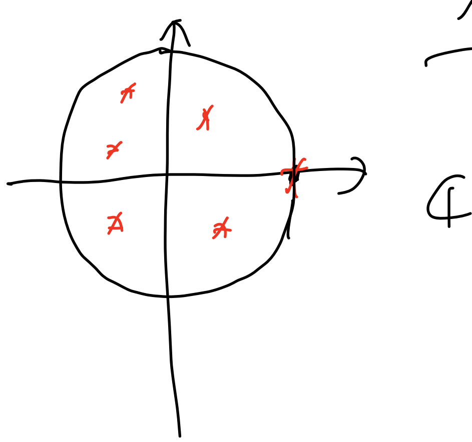
$\underline{Ay'' = y''}$. 若 $y'' \neq 0$.

$y''_j \geq 0$, $\Rightarrow \underline{y''_j > 0}$ 矛盾,

$\Rightarrow y'' = 0$, $\alpha_0 = 1$, $\Rightarrow y = y'$.

$\lim_{k \to +\infty} A^k x$ 存在性. 收敛速度??

A 的特征值



$\lambda=1$ 代数重数 $=1$.

$\lim\limits_{k\to+\infty} A^k$ 是到 $\ker(A-I)$ 的投影.

想像: $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$|\lambda_i| \le \mu < 1$

$\lim\limits_{k\to\infty} P^{-1}A^kP = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$